РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА КУБОК ИМЕНИ Ю.А. ГАГАРИНА

2023-2024 учебный год

КУБОК ГАГАРИНА олимпиада школьников

МАТЕМАТИКА

ОТВЕТЫ РЭ-2024

8 класс

Максимальное количество баллов за задания:

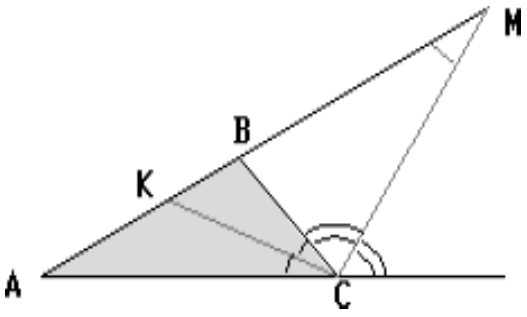
1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
4	4	4	4	5	5	5	5	36

1. *Максимально 4 балла.*

91 В команду входит либо одна женщина, либо две. Разберём оба случая. Если в команде две женщины, то двух мужчин к ним можно добавить C_7^2 способами. Если же в команду входит только одна женщина (её можно выбрать двумя способами), то команду можно дополнить тремя мужчинами C_7^3 различными способами. Таким образом, общее число возможных команд равно $C_7^2 + 2C_7^3 = 91$. *Каждый случай по 2 балла.*

2. *Максимально 4 балла.*

50°. Пусть указанные биссектрисы пересекают луч AB в точках K и M соответственно. Тогда ∠MCK = ½ ∠ACB + ½ (180° – ∠ACB) = 90°. Поэтому ∠KMC = 90° – ∠MKC = 90° – 40° = 50°



Только ответ – 1 балл.

3. *Максимально 4 балла.*

Нельзя Отметим центры клеток доски и соединим отрезками пары отмеченных точек, если из одной в другую можно пройти ходом коня. Получится «цикл» из восьми точек. Перемещение коней по доске соответствует движению по рёбрам этого цикла. Но при движении по циклу нельзя изменить порядок следования коней.

4. *Максимально 4 балла.*

11 Оценка *(2 балла)*. Очевидно, n ≤ 12, поскольку существует лишь одна пара чисел с разностью 13

Предположим, что требуемое возможно при n = 12. Число 12 представляется в виде разности чисел от 1 до 14 ровно двумя способами: 13 – 1 и 14 – 2.

Пусть для определенности число 1 – красное. Тогда число 13 тоже красное, а числа 2 и 14 – синие. Далее, существуют три пары с разностью 11: 12 – 1, 13 – 2, 14 – 3. Пара 13 и 2 разноцветная, значит, две остальных – одноцветные, поэтому число 12 красное (как и 1), а число 3 – синее. Продолжая таким образом рассматривать разности 10, 9, 8 и 7, на каждом шаге мы будем получать, что все возможные пары, кроме двух, уже разноцветные, и поэтому цвета еще двух чисел восстанавливаются однозначно. В итоге мы получим, что числа от 2 до 7 включительно – синие, а числа от 8 до 13 – красные. Но в таком случае число 6 не представляется в виде разности ни красных, ни синих чисел. Противоречие. Следовательно, n ≤ 11.

Пример для n = 11: числа 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 – красные, а остальные числа – синие (расположение синих и красных чисел симметрично относительно середины отрезка [1, 14]). *(2 балла)*

5. *Максимально 5 баллов.*

10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31

Заметим, что $A^2<99^2=9801<9999$. Поэтому сумма цифр A^2 меньше 9*4=36. Так как она равна квадрату суммы цифр A, то сумма цифр A меньше $36^{1/2}=6$, то есть меньше или равна 5. Остаётся 15 вариантов: 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 40, 41, 50, из которых условию удовлетворяют только 9 вариантов, указанных в ответе.

За отсутствие нескольких верных ответов или при наличии неверных вариантов снимать от 1 до 5 баллов.

6. *Максимально 5 баллов.*

2857 чисел Делимость $2n - n^2$ на 7 зависит только от делимости на 7 множителей n и $2 - n$. Если один из этих множителей делится на 7, то другой не делится. Среди каждых 7 подряд идущих чисел подойдут ровно два. $10000 = 1428 \cdot 7 + 4$. Среди последних 4 чисел подойдёт ровно одно. Поэтому количество «подходящих» чисел равно $1428 \cdot 2 + 1 = 2857$.

За потерю одного числа снимать 1-2 балла.

7. *Максимально 5 баллов.*

Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ длины сторон многоугольника в порядке убывания (таким образом, a_1 – самая длинная сторона). Предположим, что условие задачи не выполняется. Тогда $a_2<a_1/2$, $a_3<a_2/2<a_1/4$, ... , $a_n<a_{n-1}/2<\ldots<a_1/2^{n-1}$. Отсюда следует, что $a_2+a_3+\ldots+a_n < a_1/2+a_1/4+\ldots+a_1/2n-1 < a_1$. Таким образом, получаем, что в данном многоугольнике сторона a_1 больше суммы остальных сторон, что неверно (отрезок, соединяющий две точки, не длиннее любой ломаной, соединяющей эти точки).

8. *Максимально 5 баллов.*

$$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

Заметим, что $n^2-n+1=(n-1)^2+(n-1)+1$. Поэтому

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{2+1}=\frac{1\cdot 2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$